7/5/20

Διατηρήσιμα συστήματα

Έχουμε ήδη συνδέσει την εξίσωση του Νεύτωνα με τη διατήρηση της ενέργειας. Δύο είναι τα ερωτήματα που θα απαντήσουμε τώρα:

(α) Πώς (αν) μπορώ να μελετήσω την κίνηση ενός υλικού σημείου και να τη συνδέσω με τις αντίστοιχες ενέργειες $\vec{F} = -\nabla \vec{V}$

(b) Πώς μέσω της δυναμικής ενέργειας μπορώ να σχολιάσω τα σημεία ισορροπίας ενός συστήματος και την ευστάθεια τους

Θεωρούμε τη γενική μορφή της εξίσωσης:

$\frac{1}{2} m(x) (\dot{x})^2 + V(x) = E$ όπου πλέον και η μάζα μεταβάλλεται

Προφανώς αν E είναι σταθερή το σύστημα διατηρεί σταθερή την ενέργεια του. Ποιος νόμος έχει τέτοιο ολ/μα κίνησης ? 1) Παραγώγιση ως προς τον τόνο
2) Οι τόνοι αντιστοιχούν σε παράγωγο του x
Οι τελίτσες του t

Παραγωγίζουμε:

$$(*) \quad \frac{1}{2} m' \dot{x} (\dot{x})^2 + m \dot{x} \ddot{x} + V' \dot{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(x) \ddot{x} + \frac{1}{2} m'(x) (\dot{x})^2 + V'(x) = 0$$

Θέτουμε $v(x) = \int \sqrt{m(x)}\, dx$ ή $\frac{dv}{dx} = \sqrt{m(x)}$

$\frac{dm}{dt} = \dot{m} = \frac{dm}{dx} \frac{dx}{dt}$ (*) $\frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$

Άρα: $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = \sqrt{m(x)}\,\dot{x}$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\sqrt{m}\cdot\dot{x}) = \ddot{x}\sqrt{m} + \dot{x}\frac{d}{dx}(\sqrt{m})\cdot\dot{x} =$$
$$= \ddot{x}\sqrt{m} + (\dot{x})^2\frac{m'}{2\sqrt{m}}$$

Δηλαδή
$$\ddot{u}\sqrt{m} = \frac{1}{2}m'(\dot{x})^2 + m\ddot{x}$$

Τελικά: $\ddot{u}\sqrt{m} + V'(x) = 0 \Leftrightarrow \ddot{u} + \frac{V'(x)}{\sqrt{m}} = 0$

Όμως:
$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{du}\frac{du}{dx} = \sqrt{m}\,V'(u) \quad \text{και άρα:}$$
$$\ddot{u} + V'(u) = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{u} = -V'(u) = F(u)}$$

Η εξίσωση είναι και πάλι μια εξίσωση τύπου του $2^{ου}$ νόμου του Newton

και είναι ισοδύναμη με $\frac{1}{2}(\dot{u})^2 + V(u) = c$ σταθερή

Τελικά η μορφή που έχει ένα διατηρήσιμο σύστημα είναι: $\boxed{\ddot{x} = f(x)}$

με $V(x) = -\int f(x)\,dx \Leftrightarrow f(x) = -\frac{dV}{dx}$

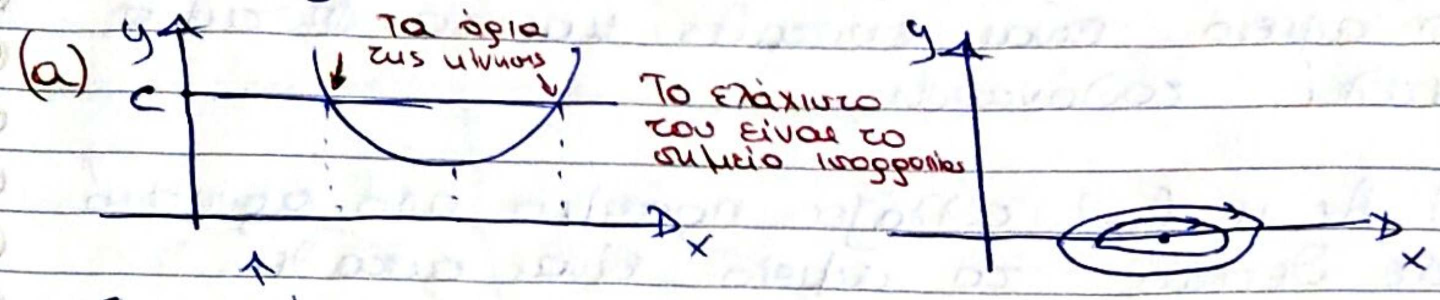
Τα σημεία ευστάθειας είναι οι λύσεις της:
$$f(x) = -\frac{dV}{dx} = 0$$

και τα διαγράμματα φάσης κατασκευάζονται από τον: $\frac{1}{2}(\dot{x})^2 + V(x) = c$: ή

$\dot{x} = \pm\sqrt{2c - 2V(x)}$: Εξίσωση

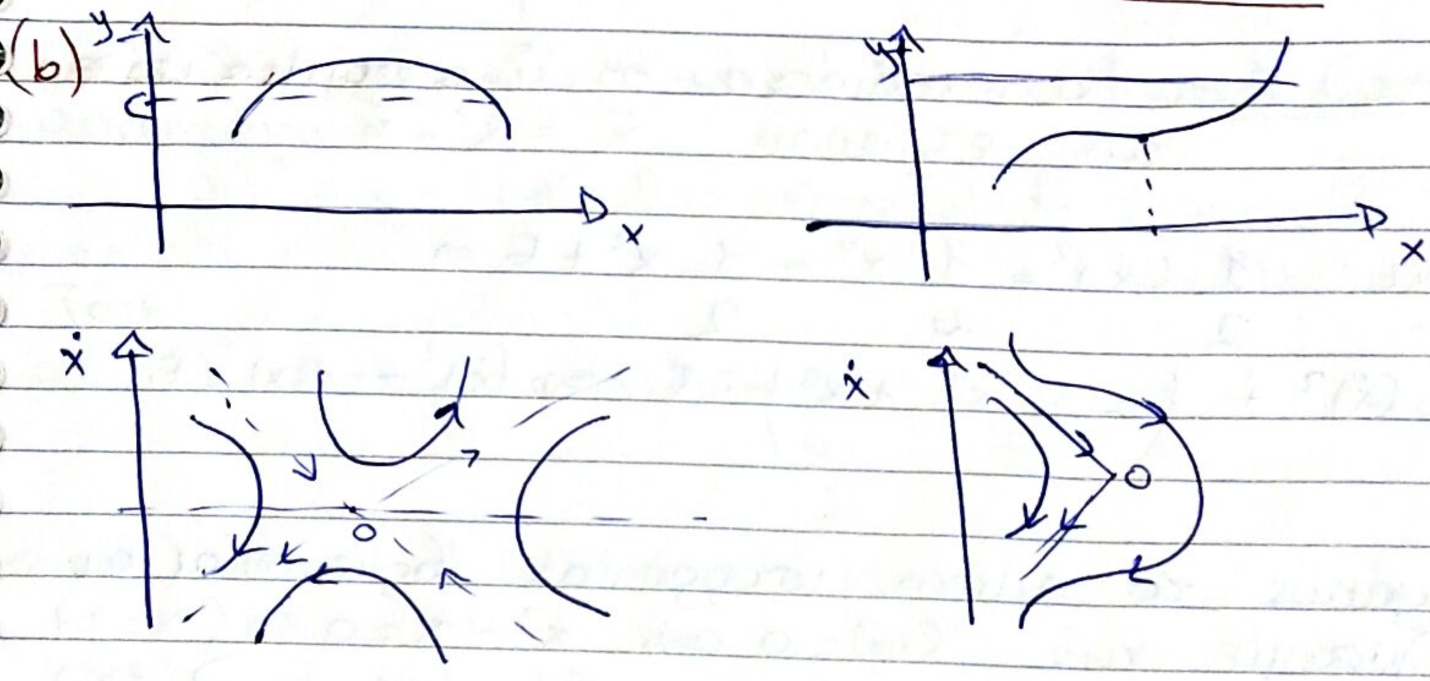
Τα όρια της κίνησης χαρακτηρίζονται απ' αυτήν την

Μ' αυτό τον τρόπο μπορούμε να συνδέσουμε χώρους φασικούς και δυναμικό



Ευσταθές σημείο ισορροπίας

Ταλάντωση



Ασταθή σημεία ισορροπίας

Διαγράμματα φάσης και δυνάμεις

Αν υποθέσουμε ότι στην εξίσωση $\ddot{x} = f(x)$, η $f(x)$ αντιστοιχεί στη δύναμη που ασκείται στο σύστημα τότε:

(a) Αν η $f(x)$ αλλάζει πρόσημο από θετικό σε αρνητικό περνώντας από το σημείο ισορροπίας το σημείο είναι ευσταθές και το σύστημα εκτελεί ταλάντωση.

(b) Αν η $f(x)$ αλλάζει πρόσημο από αρνητικό σε θετικό το σημείο είναι ασταθές

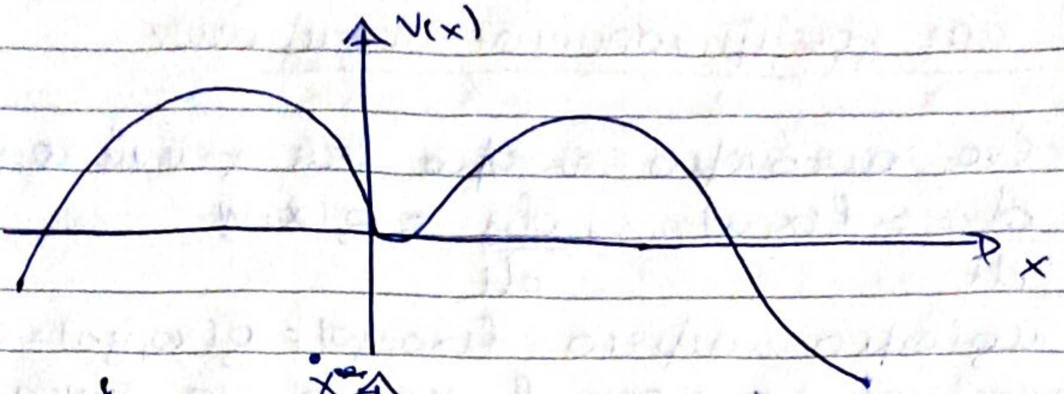
Παράδειγμα: Να σχεδιάσετε το διάγραμμα φάσεων της εξίσωσης: $\ddot{x} = x^2 - x$.

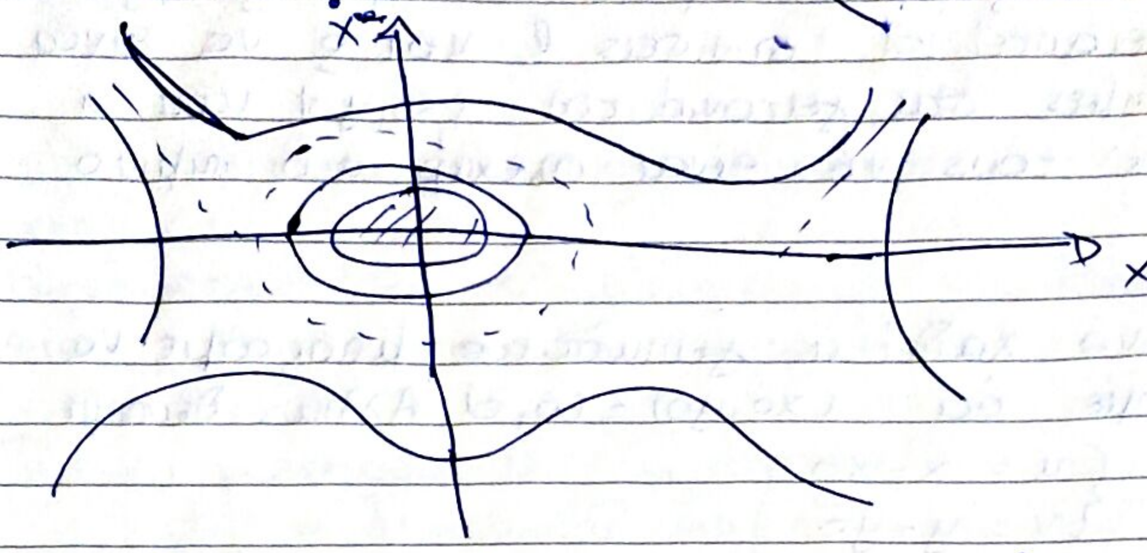
Τότε: $\frac{1}{2}(\dot{x})^2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + E \Rightarrow$

$\Rightarrow (\dot{x})^2 + \left(-\frac{1}{2}x^4 + x^2\right) = E \Rightarrow (\dot{x})^2 + V(x) = E$

Προφανώς τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται αν λύσουμε την $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases}$

Το σημείο $x = 0$ είναι ευσταθές ενώ τα $x = \pm 1$ ασταθή





Οι διαχωριστικές καμπύλες με διακεκομένη αντιστοιχούν:

$$(\dot{x})^2 = E - V(x) \quad \text{με} \quad E = V(x_0) \quad \begin{cases} E = V(0) = 0 \\ E = V(\pm 1) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Τότε:

(a) $(\dot{x})^2 = 0 - V(x) \Leftrightarrow (\dot{x})^2 = +\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{4} x^2 (x^2 - 2)$

(b) $(\dot{x})^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 = \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} (x^2 - 1)^2$

$$(\dot{x})^2 = \frac{1}{4} (x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow \dot{x} = \frac{1}{2} (x^2 - 1)$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{2} (x^2 - 1)$$

Ευστάθεια και γραμμικοποίηση συστημάτων

Θεωρούμε ένα αυτόνομο σύστημα στη γενική του μορφή: $\frac{dx}{dt} = f(x,y)$, $\frac{dy}{dt} = g(x,y)$
και το κρίσιμο σημείο $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) = 0$
Θα χρειαστεί οι συναρτήσεις f και g να είναι διαφορίσιμες στη γειτονιά του (x_0,y_0) και η παράγωγος τους να είναι συνεχής στο σημείο αυτό

Χωρίς να χαθεί η γενικότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι: $(x_0,y_0) = (0,0)$. Αλλιώς θέτουμε:

$$\begin{cases} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{cases}$$

και το σύστημα είναι ισοδύναμο με:

$$\frac{du}{dt} = f(u+x_0, v+y_0) = f_1(u,v)$$

$$\frac{dv}{dt} = g(u+x_0, v+y_0) = g_1(u,v)$$

Στη γειτονιά του (x_0,y_0) μπορώ να χρησιμοποιήσω το θεώρημα Taylor και να γράψω

$$f(x_0+u, y_0+v) = f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} u + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} v + r(u,v)$$

όπου το υπόλοιπο $r(u,v)$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{r(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0$$

Το ίδιο μπορώ να γράψω και για τη συνάρτηση $g(x,y)$ ώστε το σύστημα σε μια περιοχή γύρω από το (x_0,y_0) να γραφεί ως:

$$\frac{du}{dt} = f_x(x_0,y_0)\,u + f_y(x_0,y_0)\,v$$

$$\frac{dv}{dt} = g_x(x_0,y_0)\,u + g_y(x_0,y_0)\,v$$

αγνοώντας τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα που είναι αμελητέα στην περιοχή αυτή.

Τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = J(x_0,y_0)\,\vec{u} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

όπου ο πίνακας J είναι ο Ιακωβιανός πίνακας. Δηλ. πρέπει να μελετήσουμε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής $\dot{\vec{u}} = A\vec{u}$

Παράδειγμα: Έστω $f(x,y) = 3x - x^2 - xy$

$g(x,y) = y + y^2 - 3xy$

Τα κρίσιμα σημεία είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} 3x - x^2 - xy = 0 \\ y + y^2 - 3xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(3-x-y) = 0 \\ y(\cancel{3}1+y-3x) = 0 \end{cases}$$

Άρα: $\underline{x=0}$: $y(1+y) = 0 \Rightarrow y=0,\ y=1$

$\underline{3-x-y=0}$: $\begin{cases} x = 3-y \\ y(1+y)+9+3y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 3-y \\ y(8+4y) = 0 \end{matrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ y = 0 \ , y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \ , y = 0 \\ x = 1 \ , y = 2 \end{cases}$$

Συνολικά : $(0,0)$, $(0,-1)$, $(1,2)$, $(3,0)$

Έστω ότι $(x_0, y_0) = (1,2)$ τότε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - 2x - y \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = -x \ , \ \frac{\partial g}{\partial x} = -3y \ ,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1 + 2y - 3x$$

και άρα: $J(x_0, y_0) = J(1,2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

άρα: $\dot{\vec{u}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \vec{u}$

Το συνολικό συμπέρασμα είναι ότι το βασικό μας πρόβλημα είναι να κατανοήσουμε την ευστάθεια γραμμικών συστημάτων μας και τα υπόλοιπα μπορούμε να τα γραμμικοποιήσουμε σε μια περιοχή γύρω από ένα κρίσιμο σημείο